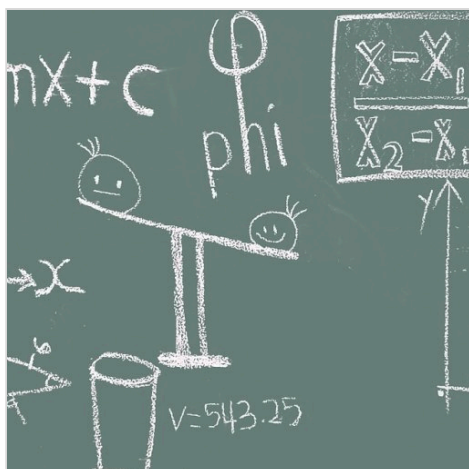


L U M B R E



Sucesiones, series y la semilla del cálculo: del promedio al instante

Grado: 4

Materia: Pensamiento Matemático IV

03/10/2026

Antes de empezar

Término general y suma de sucesiones aritméticas y geométricas; suma infinita convergente; razón de cambio promedio; paso de secante a tangente; límite intuitivo; aplicaciones.

QUÉ APRENDERÁS

- Modelar sucesiones aritméticas y geométricas con sus sumas, distinguir crecimiento lineal de exponencial, y explicar la idea de cambio promedio frente a cambio instantáneo (derivada como límite de la secante).

Contar el cambio: de lo discreto a lo continuo

Hoy sucesiones; mañana, cálculo

Una sucesión es una lista de números con orden: el sueldo de cada año, la población de cada censo, los granos de arroz del tablero de ajedrez. Este capítulo hace dos cosas: te da el motor (sucesiones aritméticas de crecimiento lineal y geométricas de crecimiento exponencial, con sus sumas) y, sobre todo, siembra la idea más importante de toda la matemática moderna: pasar del CAMBIO PROMEDIO (entre dos momentos) al CAMBIO INSTANTÁNEO (en un instante). Ese salto —de la recta secante a la tangente, con los intervalos encogiéndose hacia cero— es literalmente la semilla del cálculo y de la derivada. No calcularemos derivadas; entenderás QUÉ son y de dónde salen.



Imagen libre de Wikimedia Commons (CC BY-SA 4.0, autor: User:Casalarr)

VIDEO

LA DERIVADA COMO RAZÓN de CAMBIO (EXPLICACIÓN y DEFINICIÓN) - #1

Video de apoyo verificado por oembed.



Escanea para verlo en Lumbre

<https://www.youtube.com/watch?v=jMk80JaeGew>

Sucesión aritmética: siempre el mismo paso

- Cada término se obtiene SUMANDO una constante d : $a_n = a_1 + (n-1)d$. Ej.: 3, 7, 11, 15... con $a_1 = 3$ y $d = 4$.
- Suma de los n primeros: $S_n = n \cdot (a_1 + a_n) / 2$ (n veces el promedio de los extremos).
- Crecimiento LINEAL: su gráfica son puntos sobre una recta; la pendiente es d .

Ejemplo resuelto: el término 20 y su suma

En 3, 7, 11, 15...:

$$1. a_{20} = 3 + (20 - 1) \cdot 4 = 3 + 76 = 79.$$

$$2. S_{20} = 20 \cdot (3 + 79) / 2 = 20 \cdot 41 = 820.$$

La travesura de Gauss

Historia rápida: Gauss niño sumó $1+2+\dots+100$ escribiendo $100 \cdot 101 / 2 = 5050$: es la misma fórmula, promedio de extremos por cantidad de términos.

Sucesión geométrica: siempre el mismo factor

- Cada término se obtiene MULTIPLICANDO por una constante r : $a_n = a_1 \cdot r^{(n-1)}$.
Ej.: 2, 6, 18, 54... con $a_1 = 2$ y $r = 3$.
- Suma finita: $S_n = a_1(r^n - 1)/(r - 1)$, para $r \neq 1$.
- Suma INFINITA convergente: solo si r está entre -1 y 1 , $S_\infty = a_1/(1 - r)$. El crecimiento EXPONENCIAL dispara; el decaimiento exponencial (r entre 0 y 1) se acumula a un valor finito.

Ejemplo resuelto: la suma que nunca llega a 2

Considera $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots$ ($a_1 = 1$, $r = 1/2$):

1. Como $|r|$ es menor que 1, converge a $S_\infty = 1/(1 - 1/2) = 1/(1/2) = 2$.
2. Ninguna suma parcial LLEGA a 2, pero se acerca tanto como quieras: esa es la idea de LÍMITE.

Razón de cambio: promedio vs instante

- CAMBIO PROMEDIO entre dos momentos $= (f(b) - f(a))/(b - a)$: es justo la PENDIENTE de la recta SECANTE que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.
- CAMBIO INSTANTÁNEO en un punto: acerca b hacia a (acorta el intervalo). La secante "rueda" hasta volverse TANGENTE y su pendiente se estabiliza: ESA es la derivada.
- Notación sin miedo: se lee "el límite del cambio promedio cuando el intervalo tiende a 0". No calculamos el 0 (sería dividir entre 0): observamos a qué VALOR se acerca.

Ejemplo resuelto: de secante a tangente (la idea)

Toma $f(x) = x^2$ en el punto $x = 1$. Mide el cambio promedio en intervalos cada vez más pequeños $[1, 1+h]$:

h	Intervalo	Cambio promedio = $((1+h)^2 - 1)/h$	Valor
1	[1, 2]	$(4 - 1)/1$	3
0.5	[1, 1.5]	$(2.25 - 1)/0.5$	2.5
0.1	[1, 1.1]	$(1.21 - 1)/0.1$	2.1
0.01	[1, 1.01]	$(1.0201 - 1)/0.01$	2.01

- Los valores 3, 2.5, 2.1, 2.01... se arriman a 2: la pendiente de la TANGENTE en $x = 1$ es 2. Eso (no una regla memorizada) es la derivada de x^2 en 1.

Básico

1. El siguiente término de 5, 9, 13, 17, ... es:

- ☐ 20
☐ 21
☐ 19

2. Una sucesión geométrica con $r = 2$ tiene suma infinita finita.

- ☐ Verdadero
☐ Falso

3. En una sucesión aritmética el término general es $a_n = a_1 +$

_____ ; en una geométrica es $a_n = a_1 \cdot$
 _____ .

Intermedio

4. Une cada situación con su modelo de sucesión:

4.	interés compuesto al 5% anual	_____
4.	una escalera donde cada peldaño está 20 cm más alto	_____
4.	una dosis cuyo efecto se reduce a la mitad cada hora	_____
4.	las fichas de dominó cayendo: 1, 2, 4, 8...	_____

Opciones: geométrica, $r = 1.05$ (crecimiento exponencial) · aritmética, $d = 20$ (crecimiento lineal) · geométrica, $r = 0.5$ (decaimiento) · geométrica, $r = 2$ (duplicación)

5. Una sucesión aritmética tiene $a_1 = 4$ y $d = 6$. ¿Cuál es el término a_{10} ? Entero.

Respuesta:

Avanzado

ACTIVIDAD INTERACTIVA
DISPONIBLE EN LUMBRE

6. Un texto sobre cambio promedio y derivada. La afirmación con ERROR es:



7. A partir de la tabla de posiciones de un móvil $s(t) = t^2$ (metros, segundos), calcula la velocidad promedio en $[1, 3]$, luego en $[1, 2]$, $[1, 1.5]$ y $[1, 1.1]$. Ordena los resultados y estima a qué valor se acerca: la velocidad INSTANTÁNEA en $t = 1$.

Se evalúa ver la sucesión de promedios (2, 3, 3.5, ...) acercándose a 2 — y explicar con palabras el paso de "promedio" a "instante".

Aplicaciones reales

- Finanzas: el interés compuesto es geométrico; entender por qué "interés sobre interés" explota con el tiempo.
- Biología y epidemiología: reproducción y contagio crecen de forma geométrica al inicio; de ahí las curvas.
- Física: velocidad y aceleración son cambios instantáneos de posición y velocidad — la idea del límite por todas partes.

Errores frecuentes

- Usar n en lugar de $(n-1)$ en los términos generales.
- Aplicar la suma infinita cuando $|r| \geq 1$ (no converge).
- Creer que la derivada es "dividir entre cero": es un límite, un acercarse.
- Confundir crecimiento lineal (aritmético) con exponencial (geométrico).

Conexiones con otros aprendizajes

Con la U1 (exponencial y logaritmo) el crecimiento geométrico ES la exponencial discreta; con la U3 (recta) la pendiente es el cambio promedio; y con CNEYT IV, las medias móviles y tasas instantáneas (velocidad, dosis) aplican la misma idea de acercar intervalos.

Khan Academy · Sucesiones <https://www.khanacademy.org/math/algebra/x2f8bb11595b61c86:squences> Práctica de términos generales y sumas de sucesiones.

ACTIVIDAD INTERACTIVA DISPONIBLE EN LUMBRE

8. Tarjetas de cambio



ACTIVIDAD INTERACTIVA
DISPONIBLE EN LUMBRE

9. Modelar sucesiones y explicar el cambio instantáneo



Para mirarlo de otra manera

Analogía: el velocímetro

Tu viaje de 120 km en 2 horas da una velocidad PROMEDIO de 60 km/h. Pero el velocímetro marca tu velocidad EN ESE INSTANTE, que cambia segundo a segundo. Pasar de "promedio del viaje" a "lo que marca el velocímetro ahora" es exactamente ir de la secante a la tangente.

Referencia curricular

Grado:	4
Materia:	Pensamiento Matemático IV

Versión interactiva completa (con actividades, videos y autoevaluación):



<https://lumbre.lat/object/prepa2-pmat4-u4-cap-sucesiones-cambio>

Material educativo generado desde Lumbre · lumbre.lat